Die Perronsche Methode

Emilia Finsterwald und Peter Schrank

21.06.2012

Gliederung

Oskar Perron (1880 - 1975)

⋆7.Mai 1880 in Frankenthal - †22.Feb. 1975 in München

Lösung eines speziellen Randwertproblems

Im Fall von...

$$\begin{aligned} \triangle u = 0 \qquad & x \in \Omega \\ u = g \qquad & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

wobei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ und $g \in C(\partial\Omega)$

$$(\triangle u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2})$$

Harmonische Funktionen

Subharmonische Fkt.	$\triangle u \geqq 0$
Superharmonische Fkt.	$\triangle u \leqq 0$
Harmonische Fkt.	$\triangle u = 0$
	für $x \in \Omega$

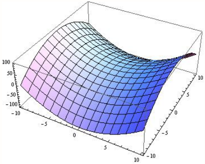


Abbildung : $x^2 - y^2$ Sattelfunktion

Harmonische Funktionen

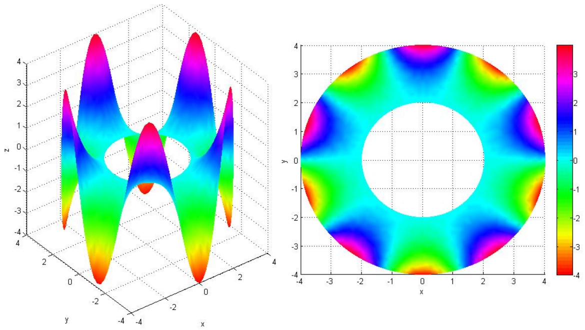


Abbildung : Harmonische Funktion auf einem Kreisring

Harmonische Liftung

Sei $u \in C(\overline{\Omega})$ und $B = B_r(x_0)$ eine offene Kugel, deren Abschluss in Ω liegt.

Die harmonische Liftung von u ist die durch die Formel

$$u_B(x) = \begin{cases} \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{n\omega_n r} \int_{\partial B} \frac{u(y)}{|x-y|^n} dy & x \in B \\ u(x) & x \in \overline{\Omega} \backslash B \end{cases}$$

definierte Funktion $u_B \in C(\overline{\Omega})$.

Maximumsprinzip und Harnackscher Konvergenzsatz

Im Innern eines zusammenhängenden Definitionsgebietes U nimmt eine harmonische Funktion ihr Maximum und ihr Minimum nie an, außer wenn sie konstant ist. (starkes Maximumsprinzip)

Es seien $u_k, k = 1, 2, \ldots$ in einem Gebiet $W \subseteq \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:

1. u_k ist harmonisch in W für $k = 1, 2, \ldots$;
2. $u_k \leq u_{k+1}$ für $k = 1, 2, \ldots$;
3. $u_k(x)$ ist nach oben beschränkt für jedes $x \in W$.

Dann konvergiert $(u_k)_{k=1,2,\ldots;}$ punktweise gegen eine in W harmonische Funktion u und die Konvergenz ist gleichmäßig in jeder abgeschlossenen Kugel $B_r(x_0) \subset W$.

Vorarbeit zur Perronschen Methode

Wir benötigen...

(i)$u \in C(\overline{\Omega})$ ist subharmonisch $\Leftrightarrow u \leqq u_B$

$\forall$ offenen Kugeln B mit $\overline{B} \in \Omega$

(ii)Seien $u \in C(\overline{\Omega})$ subharmonisch Fkt., B

offen mit $\overline{B} \in \Omega \Rightarrow u_B$ subharmonisch

zu (i) u subharmonisch $\Leftrightarrow u \leq u_B$

$$u(x) \leq \begin{cases} \frac{r^2-|x-x_0|^2}{n\omega_n r} \int_{\partial B} \frac{u(y)}{|x-y|^n} dy & x \in B \quad (\star) \\ u(x) & x \in \overline{\Omega} \setminus B \end{cases}$$

$u \leq u_B \Rightarrow u$ subharmonisch

$B = B_r(x_0)$ also gilt für $x = x_0$ in $(\star)$

$$u(x_0) \leq \frac{r}{n\omega_n} \int_{\partial B_r(x_o)} \frac{u(y)}{|x_0 - y|^n} dy = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(y) dy = \overline{u_r}(x_0)$$

u subharmonisch $\Rightarrow u \leq u_B$

$$w := u(x) - \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{n\omega_n r} \int_{\partial B} \frac{u(y)}{|x - y|^n} dy$$

$\Rightarrow_{Maximumsprinzip}$ $w \leq 0$ auf $\overline{B}$

$\Rightarrow u \leq u_B$

zu (ii) u subharmonisch $\Rightarrow u_B$ subharmonisch

Wir zeigen:

$\forall x^* \in \Omega$ gilt: $\quad u_B(x^*) \leq \overline{(u_B)_\rho}(x^*)$

für hinreichend kleine ρ

Die Perronsche Methode

Die Perron-Klasse

$$P_g = \{u \in C(\overline{\Omega}) : u \text{ subharmonisch in } \Omega; u(x) \leq g(x) \quad \forall x \in \partial\Omega\}$$

Definiere eine Funktion $u_g : \quad \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$

$\sup u(x) = u_g(x) \qquad \text{mit } u \in P_g$

Vorgehensweise

Wir zeigen:

- u_g ist harmonisch in Ω
- $u_g \in C(\overline{\Omega})$ und $u_g(x) = g(x) \quad \forall \quad x \in \partial\Omega$ (Teil II)

$\Rightarrow$ Existenz einer Lösung

Beweis: Die Funktion $u_g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ ist harmonisch in Ω

Schritt I

Aus der Def. von $u_g(x_0)$ folgt eine maximierende Folge $\{u_k(x_0)\}$

mit:
$u_k \in P_g$ für $k = 1, 2, \ldots;$
$u_k(x_0) \leq u_{k+1}(x_0)$ für $k = 1, 2, \ldots;$
$\lim_{k\to\infty} u_k(x_0) = u_g(x_0)\ldots$

Schritt II

Betrachte: $v_k(x) = \max\{u_1(x), \ldots u_k(x)\}$ mit $v_k \in C(\overline{\Omega})$

v_k liegt in P_g, denn v_k ist subharmonisch in Ω mit $v_k \leq g$ auf $\partial\Omega$
$v_k \leq v_{k+1}$ für $k = 1, 2, \ldots;$
$\lim_{k\to\infty} v_k(x_0) = u_g(x_0)$, denn $v_k(x_0) = u_k(x_0)\ldots$

Beweis: Die Funktion $u_g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ ist harmonisch in Ω

Schritt III

Es sei $w_k \in C(\overline{\Omega})$ die harmonische Liftung $(v_k)_B$

w_k ist harmonisch in B

$w_k \leq w_{k+1}$ denn $v_k \leq v_{k+1}$

$w_k(x_0) \leq u_g(x_0)$ denn w_k liegt in P_g:
sie ist subharmonisch in Ω und erfüllt $w_k = v_k \leq g$ auf $\partial\Omega$

Beweis: Die Funktion $u_g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ ist harmonisch in Ω

Schritt IV

Folgerung aus dem 2. Harnackschen Konvergenzsatz

$\lim_{k\to\infty} w_k(x) := w(x)$ für $x \in B$ ist harmonisch

Schritt V

Wir wissen: $w_k(x) \leq u_g(x)$ für $x \in B$

$\Rightarrow w(x) \leq u_g(x)$ und damit ist $w(x) = u_g(x)$

$\Rightarrow u_g$ ist harmonisch in B.
dieses Argument gilt für jede Kugel $B \in \Omega$

$\Rightarrow u$ ist in ganz Ω harmonisch $\square$

Barrierenfunktion und regulärer Randpunkt - Definitionen

Def.: Eine Funktion $w \in C(\overline{\Omega})$ heisst Barrierenfunktion im Punkt $x_0 \in \partial\Omega$, falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

1. w ist im Mittelwertsinne superharmonisch in Ω
   - $\forall x \in \Omega : w(x) \geq \frac{1}{||B_r||} \int_{B_r(x)} w(y)dy$
   - $\triangle w \leq 0$
2. $w(x_0) = 0$
3. $w(x) > 0$ für $x \in \overline{\Omega} \backslash \{x_0\}$

Def.: Ein Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ heisst regulärer Randpunkt, falls es eine Barrierenfunktion im Punkt x_0 gibt.

Satz: Konvergenz der Perronlösung

Es sei $x_0 \in \partial\Omega$ ein regulärer Randpunkt. Dann gilt:

für $y \in \Omega$ ist $\lim_{y \to x_0} u_g(y) = g(x_0)$

Beweis: Konvergenz der Perronlösung

Schritt I

Vorraussetzung: Barrierenfkt. w in x_0 und Randfunktion g auf $\partial\Omega$

- da g in x_0 stetig, existiert $\delta > 0$, so dass

$$x \in \partial\Omega.\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$$

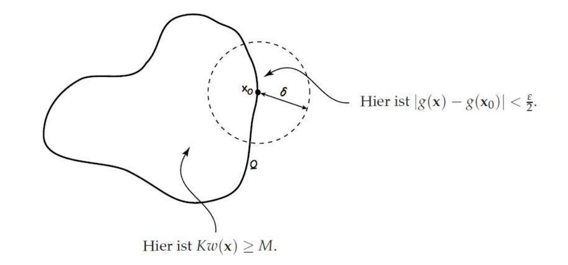
- da w positiv und stetig auf $\overline{\Omega}\backslash\{x_0\}$, existiert $m > 0$, so dass

$$x \in \overline{\Omega},\ |x - x_0| \geq \delta \Rightarrow w(x) \geq m$$

- Es sei $M = \sup_{x\in\partial\Omega} |g(x)|$ und $K = \frac{2M}{m}$, so dass

$$x \in \overline{\Omega},\ |x - x_0| \geq \delta \Rightarrow Kw(x) \geq 2M$$

Beweis:Konvergenz der Perronlösung



Beweis:Konvergenz der Perronlösung

Schritt II

Definiere Hilfsfunktion $f_1 \in C(\overline{\Omega})$

$$f_1(x) = g(x_0) - \frac{\epsilon}{2} - Kw(x)$$

- $f_1(x)$ ist subharmonisch in Ω
- $f_1(x) \leq g(x)$ für alle $x \in \partial\Omega$, so dass $f_1 \in P_g$ ist.

Beweis:Konvergenz der Perronlösung

Schritt III

Folgerung aus den Eigenschaften von f_1

- da w stetig im Punkt x_0, existiert ein $\triangle > 0$, so dass

$$x \in \Omega,\ |x - x_0| < \triangle \Rightarrow |w(x) - w(x_0)| = w(x) < \frac{\epsilon}{2K}$$

(Beachte: $Kw(x) < \frac{\epsilon}{2}$)

- somit gilt $\forall x \in \Omega$

$$u_g(x) \geq f_1(x) \geq g(x_0) - \epsilon, \text{ nach Definition von } f_1(x)$$

Beweis:Konvergenz der Perronlösung

Schritt IV

Definiere Hilsfunktion $f_2 \in C(\overline{\Omega})$

$$f_2(x) = v(x) - \left(g(x_0) + \tfrac{\epsilon}{2} + Kw(x)\right), \qquad \forall v \in P_g$$

- $f_2(x)$ ist subharmonisch in Ω und nichtpositiv auf $\partial\Omega$ (Beachte: $v(x) \leq g(x) < g(x_0) + \frac{\epsilon}{2}$)

- nach dem Maximumsprinzip ist f_2 also nichtpositiv auf $\overline{\Omega}$

Beweis:Konvergenz der Perronlösung

Schritt V

Folgerung aus den Eigenschaften von f_2

nach Def. ist $u_g(x) = \sup v(x)$ und für $x \in \Omega$ mit $|x - x_0| < \triangle$ gilt:

$u_g(x) \leq g(x_0) + \frac{\epsilon}{2} + Kw(x)$
$u_g(x) \leq g(x_0) + \epsilon$

Beweis:Konvergenz der Perronlösung

Folgerung

für $x \in \Omega$, $|x - x_0| < \triangle$ gilt:

$u_g(x) \geq g(x_0) - \epsilon$ und $u_g(x) \leq g(x_0) + \epsilon$

$$\Rightarrow |u_g(x) - g(x_0)| < \epsilon \; \square$$

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit!