Quantenmechanische Streutheorie

Aaron Schaal

Seminar zu ausgewählten Themen der QED

22.09.2015

Gliederung

Grundlagen - Zeitentwicklung

Unitäre Zeitentwicklung:

$$|\Psi(t)\rangle = U(t,s)\,|\Psi(s)\rangle \quad , \quad U(t,s)^\dagger = U(s,t)$$

$$U(t,s)U(s,r) = U(t,r)$$

Für V zeitunabhängig:

$$\Psi(t) = e^{-iHt}\Psi(s) \quad \text{mit} \quad H = H_0 + V$$

Grundlagen - Zeitentwicklung

Unitäre Zeitentwicklung:

$$|\Psi(t)\rangle = U(t,s)\,|\Psi(s)\rangle \quad , \quad U(t,s)^\dagger = U(s,t)$$

$$U(t,s)U(s,r) = U(t,r)$$

Für V zeitunabhängig:

$$\Psi(t) = e^{-iHt}\Psi(s) \quad \text{mit} \quad H = H_0 + V$$

Grundlagen - Zeitentwicklung

Unitäre Zeitentwicklung:

$$|\Psi(t)\rangle = U(t,s)\,|\Psi(s)\rangle \quad , \quad U(t,s)^\dagger = U(s,t)$$

$$U(t,s)U(s,r) = U(t,r)$$

Für V zeitunabhängig:

$$\Psi(t) = e^{-iHt}\Psi(s) \quad \text{mit} \quad H = H_0 + V$$

Grundlagen - Wellenoperatoren

$$W_{\substack{in \\ out}} = \underset{t \to \mp\infty}{\text{s-lim}}\, e^{iHt} e^{-iH_0 t}$$

Falls V zeitabhängig:

$$\begin{aligned} W_{\substack{in \\ out}} &= \underset{t \to \mp\infty}{\text{s-lim}}\, U(t,0)^\dagger e^{-iH_0 t} \\ &= \underset{t \to \mp\infty}{\text{s-lim}}\, U(0,t) e^{-iH_0 t} \end{aligned}$$

Grundlagen - Wellenoperatoren

$$W_{\substack{in\\out}} = \underset{t\to\mp\infty}{\text{s-lim}}\, e^{iHt}e^{-iH_0 t}$$

Falls V zeitabhängig:

$$\begin{aligned} W_{\substack{in\\out}} &= \underset{t\to\mp\infty}{\text{s-lim}}\, U(t,0)^\dagger e^{-iH_0 t} \\ &= \underset{t\to\mp\infty}{\text{s-lim}}\, U(0,t) e^{-iH_0 t} \end{aligned}$$

Grundlagen - WW-Bild

Transformationen:

- Zustände:

$$|\tilde{\varphi}\rangle = e^{iH_0 t} |\varphi\rangle$$

- Operatoren:

$$\tilde{V}(t) = e^{iH_0 t} V(t) e^{-iH_0 t}$$

Grundlagen - S-Matrix

- Im Schrödinger-Bild:

$$S = W_{out}^{\dagger} W_{in} = \lim_{\substack{s \to -\infty \\ t \to +\infty}} e^{iH_0 t} U(t,s) e^{-iH_0 s}$$

Übergangsamplitude von $|\varphi\rangle$ zu $|\Psi\rangle$: $\langle \Psi, S\varphi \rangle$

- Im WW-Bild:

$$S = \lim_{\substack{s \to -\infty \\ t \to +\infty}} \tilde{U}(t,s)$$

Grundlagen - S-Matrix

- Im Schrödinger-Bild:

$$S = W_{out}^{\dagger} W_{in} = \lim_{\substack{s\to-\infty \\ t\to+\infty}} e^{iH_0 t} U(t,s) e^{-iH_0 s}$$

Übergangsamplitude von $|\varphi\rangle$ zu $|\Psi\rangle$: $\langle\Psi, S\varphi\rangle$

- Im WW-Bild:

$$S = \lim_{\substack{s\to-\infty \\ t\to+\infty}} \tilde{U}(t,s)$$

Grundlagen - S-Matrix

- Im Schrödinger-Bild:

$$S = W_{out}^{\dagger} W_{in} = \lim_{\substack{s \to -\infty \\ t \to +\infty}} e^{iH_0 t} U(t,s) e^{-iH_0 s}$$

  Übergangsamplitude von $|\varphi\rangle$ zu $|\Psi\rangle$: $\langle \Psi, S\varphi \rangle$

- Im WW-Bild:

$$S = \lim_{\substack{s \to -\infty \\ t \to +\infty}} \tilde{U}(t,s)$$

Schrödingergleichung

$$i\frac{d}{dt}\Psi(t) = H(t)\Psi(t) = \left(H_0 + V(t)\right)\Psi(t)$$

$$i\frac{d}{dt}\tilde{\Psi}(t) = \tilde{V}(t)\tilde{\Psi}(t)$$

Multiplikation mit i und anschließende Integration ergibt:

$$\tilde{\Psi}(t) = \tilde{\Psi}(s) - i\int_s^t dt_1\,\tilde{V}(t_1)\tilde{\Psi}(t_1)$$

$$\text{mit } \sup \tilde{V}(t) < \infty$$

Schrödingergleichung

$$i\frac{d}{dt}\Psi(t) = H(t)\Psi(t) = (H_0 + V(t))\,\Psi(t)$$

$$i\frac{d}{dt}\tilde{\Psi}(t) = \tilde{V}(t)\tilde{\Psi}(t)$$

Multiplikation mit i und anschließende Integration ergibt:

$$\tilde{\Psi}(t) = \tilde{\Psi}(s) - i\int_s^t dt_1\,\tilde{V}(t_1)\tilde{\Psi}(t_1)$$

$$\text{mit } \sup \tilde{V}(t) < \infty$$

Schrödingergleichung

$$i\frac{d}{dt}\Psi(t) = H(t)\Psi(t) = (H_0 + V(t))\,\Psi(t)$$

$$i\frac{d}{dt}\tilde{\Psi}(t) = \tilde{V}(t)\tilde{\Psi}(t)$$

Multiplikation mit i und anschließende Integration ergibt:

$$\tilde{\Psi}(t) = \tilde{\Psi}(s) - i\int_s^t dt_1\,\tilde{V}(t_1)\tilde{\Psi}(t_1)$$

$$\text{mit } \sup \tilde{V}(t) < \infty$$

Dyson-Reihe

$$\tilde{\Psi}(t) = \tilde{\Psi}(s) - i \int_s^t dt_1 \, \tilde{V}(t_1) \qquad \underbrace{\tilde{\Psi}(t_1)}_{\tilde{\Psi}(s) - i \int_s^t dt_2 \, \tilde{V}(t_2) \tilde{\Psi}(t_2)}$$

n-mal iterieren $\Rightarrow$ Dyson-Reihe:

$$\tilde{\Psi}(t) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-i)^n \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} dt_2 \ldots \int_s^{t_{n-1}} dt_n \tilde{V}(t_1) \ldots \tilde{V}(t_n)}_{\tilde{U}_n(t,s)} \right] \tilde{\Psi}(s)$$

Konvergenz der Dyson-Reihe

$$\|\tilde{U}_n(t,s)\| \leq \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} dt_2 \ldots \int_s^{t_{n-1}} dt_n \|\tilde{V}(t_1)\| \ldots \|\tilde{V}(t_n)\|$$

$$= \frac{1}{n!}\left[\int_s^t d\tau \|\tilde{V}(\tau)\|\right]^n$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds \|V(s)\| < \infty$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \tilde{V}(t_1) \ldots \tilde{V}(t_n)$$

Konvergenz der Dyson-Reihe

$$\|\tilde{U}_n(t,s)\| \leq \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} dt_2 \ldots \int_s^{t_{n-1}} dt_n \|\tilde{V}(t_1)\| \ldots \|\tilde{V}(t_n)\|$$
$$= \frac{1}{n!} \left[\int_s^t d\tau \|\tilde{V}(\tau)\| \right]^n$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds \|V(s)\| < \infty$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \tilde{V}(t_1) \ldots \tilde{V}(t_n)$$

Konvergenz der Dyson-Reihe

$$\|\tilde{U}_n(t,s)\| \leq \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} dt_2 \ldots \int_s^{t_{n-1}} dt_n \|\tilde{V}(t_1)\| \ldots \|\tilde{V}(t_n)\|$$

$$= \frac{1}{n!}\left[\int_s^t d\tau \|\tilde{V}(\tau)\|\right]^n$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds \|V(s)\| < \infty$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \tilde{V}(t_1) \ldots \tilde{V}(t_n)$$

Umformung mithilfe des Zeitordnungsoperators

$$\mathcal{T}[A_1(t_1)A_2(t_2)\dots A_n(t_n)] := \sum_{\sigma\in S_n} \tau\left(t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(n)}\right) A_{\sigma(1)}A_{\sigma(2)}\dots A_{\sigma(n)}$$

$$\text{mit } \tau\left(t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(n)}\right) = \begin{cases} 1 & \sigma(1) > \sigma(2) > \dots > \sigma(n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dt_n \mathcal{T}\left[\tilde{V}(t_1)\dots\tilde{V}(t_n)\right]$$

$$=: \mathcal{T}\left[e^{-i\int_{-\infty}^{+\infty} dt \tilde{V}(t)}\right]$$

Umformung mithilfe des Zeitordnungsoperators

$$\mathcal{T}[A_1(t_1)A_2(t_2)\dots A_n(t_n)] := \sum_{\sigma\in S_n} \tau\left(t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(n)}\right) A_{\sigma(1)}A_{\sigma(2)}\dots A_{\sigma(n)}$$

$$\text{mit } \tau\left(t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(n)}\right) = \begin{cases} 1 & \sigma(1) > \sigma(2) > \dots > \sigma(n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \dots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt_n \mathcal{T}\left[\tilde{V}(t_1)\dots\tilde{V}(t_n)\right]$$

$$=: \mathcal{T}\left[e^{-i\int_{-\infty}^{+\infty} dt\,\tilde{V}(t)}\right]$$

Umformung mithilfe des Zeitordnungsoperators

$$\mathcal{T}[A_1(t_1)A_2(t_2)\dots A_n(t_n)] := \sum_{\sigma\in S_n} \tau\left(t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(n)}\right) A_{\sigma(1)}A_{\sigma(2)}\dots A_{\sigma(n)}$$

$$\text{mit } \tau\left(t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(n)}\right) = \begin{cases} 1 & \sigma(1) > \sigma(2) > \dots > \sigma(n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \dots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt_n \mathcal{T}\left[\tilde{V}(t_1)\dots\tilde{V}(t_n)\right]$$

$$=: \mathcal{T}\left[e^{-i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt\,\tilde{V}(t)}\right]$$

Potenzreihe der S-Matrix

- Multiplikation des Potentials mit einer Testfunktion g(t)
- Potenzreihe der S-Matrix bzgl. g(t):

$$S(g) = 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n T_n(t_1, \dots, t_n) g(t_1) \dots g(t_n)}_{=:T}$$

$$S(g)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n T'_n(t_1, \dots, t_n) g(t_1) \dots g(t_n)$$

$$= (1+T)^{-1} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-T)^r$$

$$\Rightarrow \sum_{r=1}^{\infty} (-T)^r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n T'_n(t_1, \dots, t_n) g(t_1) \dots g(t_n) =$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n T_n(t_1, \dots, t_n) g(t_1) \dots g(t_n)$$

Potenzreihe der S-Matrix

- Multiplikation des Potentials mit einer Testfunktion g(t)
- Potenzreihe der S-Matrix bzgl. g(t):

$$S(g) = 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n T_n(t_1, \dots, t_n) g(t_1) \dots g(t_n)}_{=:T}$$

$$S(g)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n T'_n(t_1, \dots, t_n) g(t_1) \dots g(t_n)$$

$$= (1+T)^{-1} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-T)^r$$

$$\Rightarrow \sum_{r=1}^{\infty} (-T)^r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n T'_n(t_1, \dots, t_n) g(t_1) \dots g(t_n) =$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n T_n(t_1, \dots, t_n) g(t_1) \dots g(t_n)$$

Potenzreihe der S-Matrix

- Multiplikation des Potentials mit einer Testfunktion g(t)
- Potenzreihe der S-Matrix bzgl. g(t):

$$S(g) = 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n T_n(t_1, \dots, t_n) g(t_1) \dots g(t_n)}_{=:T}$$

$$S(g)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n T'_n(t_1, \dots, t_n) g(t_1) \dots g(t_n)$$

$$= (1 + T)^{-1} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-T)^r$$

$$\Rightarrow \sum_{r=1}^{\infty} (-T)^r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n T'_n(t_1, \dots, t_n) g(t_1) \dots g(t_n) =$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n T_n(t_1, \dots, t_n) g(t_1) \dots g(t_n)$$

Potenzreihe der S-Matrix

- Multiplikation des Potentials mit einer Testfunktion g(t)
- Potenzreihe der S-Matrix bzgl. g(t):

$$S(g) = 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n T_n(t_1, \dots, t_n) g(t_1) \dots g(t_n)}_{=:T}$$

$$S(g)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n T'_n(t_1, \dots, t_n) g(t_1) \dots g(t_n)$$

$$= (1+T)^{-1} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-T)^r$$

$$\Rightarrow \sum_{r=1}^{\infty} (-T)^r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n T'_n(t_1, \dots, t_n) g(t_1) \dots g(t_n) =$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n T_n(t_1, \dots, t_n) g(t_1) \dots g(t_n)$$

Potenzreihe der S-Matrix

- Multiplikation des Potentials mit einer Testfunktion g(t)
- Potenzreihe der S-Matrix bzgl. g(t):

$$S(g) = 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n T_n(t_1, \dots, t_n) g(t_1) \dots g(t_n)}_{=:T}$$

$$S(g)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n T'_n(t_1, \dots, t_n) g(t_1) \dots g(t_n)$$

$$= (1+T)^{-1} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-T)^r$$

$$\Rightarrow \sum_{r=1}^{\infty} (-T)^r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n T'_n(t_1, \dots, t_n) g(t_1) \dots g(t_n) =$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n T_n(t_1, \dots, t_n) g(t_1) \dots g(t_n)$$

Potenzreihe der S-Matrix

- Multiplikation des Potentials mit einer Testfunktion g(t)
- Potenzreihe der S-Matrix bzgl. g(t):

$$S(g) = 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n T_n(t_1, \dots, t_n) g(t_1) \dots g(t_n)}_{=:T}$$

$$S(g)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n T'_n(t_1, \dots, t_n) g(t_1) \dots g(t_n)$$

$$= (1 + T)^{-1} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-T)^r$$

$$\Rightarrow \sum_{r=1}^{\infty} (-T)^r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n T'_n(t_1, \dots, t_n) g(t_1) \dots g(t_n) =$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n T_n(t_1, \dots, t_n) g(t_1) \dots g(t_n)$$

Bestimmung der ersten Ordnung Störungstheorie

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-T)^r = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int dt_1 \dots dt_n T'_n(t_1,\dots,t_n)g(t_1)\dots g(t_n) =$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int dt_1 \dots dt_n T_n(t_1,\dots,t_n)g(t_1)\dots g(t_n)$$

$$X := \{\, t_1 \dots t_n \,\} = X_1 \cup \dots \cup X_r \text{ disjunkt, } X_r \neq \emptyset$$

$$T'_n(X) = \sum_{r=1}^{n}(-1)^r \sum_{P_r} T_{n_1}(X_1)\dots T_{n_r}(X_r) \text{ mit } |X_j| = n_j$$

$$\Rightarrow T'_1(t) = -T_1(t)$$

Bestimmung der ersten Ordnung Störungstheorie

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-T)^r = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int dt_1 \dots dt_n T'_n(t_1,\dots,t_n)g(t_1)\dots g(t_n) =$$
$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int dt_1 \dots dt_n T_n(t_1,\dots,t_n)g(t_1)\dots g(t_n)$$

$$X := \{\, t_1 \dots t_n \,\} = X_1 \cup \dots \cup X_r \text{ disjunkt}, \; X_r \neq \emptyset$$

$$T'_n(X) = \sum_{r=1}^{n}(-1)^r \sum_{P_r} T_{n_1}(X_1)\dots T_{n_r}(X_r) \text{ mit } |X_j| = n_j$$

$$\Rightarrow T'_1(t) = -T_1(t)$$

Bestimmung der ersten Ordnung Störungstheorie

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-T)^r = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int dt_1 \dots dt_n T_n'(t_1,\dots,t_n)g(t_1)\dots g(t_n) =$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int dt_1 \dots dt_n T_n(t_1,\dots,t_n)g(t_1)\dots g(t_n)$$

$$X := \{\, t_1 \dots t_n \,\} = X_1 \cup \dots \cup X_r \text{ disjunkt}, \; X_r \neq \emptyset$$

$$T_n'(X) = \sum_{r=1}^{n}(-1)^r \sum_{P_r} T_{n_1}(X_1)\dots T_{n_r}(X_r) \text{ mit } |X_j| = n_j$$

$$\Rightarrow T_1'(t) = -T_1(t)$$

Bestimmung der ersten Ordnung Störungstheorie

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-T)^r = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int dt_1 \dots dt_n T'_n(t_1,\dots,t_n)g(t_1)\dots g(t_n) =$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int dt_1 \dots dt_n T_n(t_1,\dots,t_n)g(t_1)\dots g(t_n)$$

$$X := \{\, t_1 \dots t_n \,\} = X_1 \cup \dots \cup X_r \text{ disjunkt, } X_r \neq \emptyset$$

$$T'_n(X) = \sum_{r=1}^{n}(-1)^r \sum_{P_r} T_{n_1}(X_1)\dots T_{n_r}(X_r) \text{ mit } |X_j| = n_j$$

$$\Rightarrow T'_1(t) = -T_1(t)$$

Kausalitätseigenschaft der S-Matrix

$$\tilde{U}(t,s)\tilde{U}(s,r) = \tilde{U}(t,r)$$

$$S = \lim_{\substack{s\to-\infty \\ t\to+\infty}} \tilde{U}(t,s)$$

$$\operatorname{supp} g_1 \subset (-\infty, s), \operatorname{supp} g_2 \subset (s, +\infty)$$

$$S(g_1+g_2) = U_0(0,\infty)U(+\infty,-\infty)U_0(-\infty,0)$$

$$U_0(0,\infty)U(+\infty,s)U_0(s,0)U_0(0,s)U(s,-\infty)U_0(-\infty,s) = S(g_2)S(g_1)$$

Kausalitätseigenschaft der S-Matrix

$$\tilde{U}(t,s)\tilde{U}(s,r) = \tilde{U}(t,r)$$

$$S = \lim_{\substack{s\to-\infty \\ t\to+\infty}} \tilde{U}(t,s)$$

$$\operatorname{supp} g_1 \subset (-\infty, s), \operatorname{supp} g_2 \subset (s, +\infty)$$

$$S(g_1+g_2) = U_0(0,\infty)U(+\infty,-\infty)U_0(-\infty,0)$$

$$U_0(0,\infty)U(+\infty,s)U_0(s,0)U_0(0,s)U(s,-\infty)U_0(-\infty,s) = S(g_2)S(g_1)$$

Kausalitätseigenschaft der S-Matrix

$$\tilde{U}(t,s)\tilde{U}(s,r) = \tilde{U}(t,r)$$

$$S = \lim_{\substack{s\to-\infty \\ t\to+\infty}} \tilde{U}(t,s)$$

$$\operatorname{supp} g_1 \subset (-\infty, s), \operatorname{supp} g_2 \subset (s, +\infty)$$

$$S(g_1 + g_2) = U_0(0,\infty)U(+\infty,-\infty)U_0(-\infty,0)$$

$$U_0(0,\infty)U(+\infty,s)U_0(s,0)U_0(0,s)U(s,-\infty)U_0(-\infty,s) = S(g_2)S(g_1)$$

Kausalitätseigenschaft der S-Matrix

$$\tilde{U}(t,s)\tilde{U}(s,r) = \tilde{U}(t,r)$$

$$S = \lim_{\substack{s\to-\infty \\ t\to+\infty}} \tilde{U}(t,s)$$

$$\operatorname{supp} g_1 \subset (-\infty, s), \operatorname{supp} g_2 \subset (s, +\infty)$$

$$S(g_1 + g_2) = U_0(0,\infty)U(+\infty,-\infty)U_0(-\infty,0)$$

$$U_0(0,\infty)U(+\infty,s)U_0(s,0)U_0(0,s)U(s,-\infty)U_0(-\infty,s) = S(g_2)S(g_1)$$

Anordnung der Integrale

$$S(g_1+g_2)=\sum_n \frac{1}{n!}\int dt_1\dots dt_n T_n(t_1,\dots,t_n)\times$$
$$\times(g_1(t_1)+g_2(t))\dots(g_1(t_n)+g_2(t_n))$$

- Gewünschte Anordnung der Testfunktionen: $g_2(t_1)\dots g_2(t_m)g_1(t_{m+1})\dots g_1(t_n)$
- # Permutationen der Testfunktionen: $\binom{n}{m}$, wobei $m=\#g_1$, $n-m=\#g_2$

Anordnung der Integrale

$$S(g_1 + g_2) = \sum_n \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n T_n(t_1, \dots, t_n) \times$$
$$\times (g_1(t_1) + g_2(t)) \dots (g_1(t_n) + g_2(t_n))$$

- Gewünschte Anordnung der Testfunktionen: $g_2(t_1) \dots g_2(t_m) g_1(t_{m+1}) \dots g_1(t_n)$
- # Permutationen der Testfunktionen: $\binom{n}{m}$, wobei $m = \#g_1$, $n - m = \#g_2$

Kausalitätseigenschaft der Potenzreihe der S-Matrix

$$S(g_1+g_2) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{n!}\binom{n}{m}\int dt_1\dots dt_n\, T_n(t_1,\dots,t_n)\times$$
$$\times\; g_2(t_1)\dots g_2(t_m) g_1(t_{m+1}\dots g_1(t_n)$$

$$= S(g_2)S(g_1) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{n!}\binom{n}{m}\int dt_1\dots dt_n\, T_m(t_1,\dots,t_m)\, T_{n-m}(t_{m+1},\dots,t_n)\times$$
$$\times\; g_2(t_1)\dots g_2(t_m) g_1(t_{m+1})\dots g_1(t_n)$$

Kausalitätseigenschaft der Potenzreihe

$$T_n(t_1,\dots,t_n) = T_m(t_1,\dots,t_m)\, T_{n-m}(t_{m+1},\dots,t_n)$$

falls für alle $t_i \in \{\, t_1 \dots t_m \,\}, t_j \in \{\, t_{m+1} \dots t_n \,\}$ *gilt:* $t_i < t_j$

Kausalitätseigenschaft der Potenzreihe der S-Matrix

$$S(g_1 + g_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{m} \int dt_1 \dots dt_n \, T_n(t_1, \dots, t_n) \times$$
$$\times \, g_2(t_1) \dots g_2(t_m) g_1(t_{m+1} \dots g_1(t_n)$$
$$= S(g_2)S(g_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{m} \int dt_1 \dots dt_n \, T_m(t_1, \dots, t_m) T_{n-m}(t_{m+1}, \dots, t_n) \times$$
$$\times \, g_2(t_1) \dots g_2(t_m) g_1(t_{m+1}) \dots g_1(t_n)$$

Kausalitätseigenschaft der Potenzreihe

$$T_n(t_1, \dots, t_n) = T_m(t_1, \dots, t_m) T_{n-m}(t_{m+1}, \dots, t_n)$$

falls für alle $t_i \in \{ t_1 \dots t_m \}, t_j \in \{ t_{m+1} \dots t_n \}$ *gilt:* $t_i < t_j$

Kausalitätseigenschaft der Potenzreihe der S-Matrix

$$S(g_1+g_2) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{n!}\binom{n}{m}\int dt_1\dots dt_n\, T_n(t_1,\dots,t_n)\times$$
$$\times\, g_2(t_1)\dots g_2(t_m)g_1(t_{m+1}\dots g_1(t_n)$$
$$= S(g_2)S(g_1) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{n!}\binom{n}{m}\int dt_1\dots dt_n\, T_m(t_1,\dots,t_m)T_{n-m}(t_{m+1},\dots,t_n)\times$$
$$\times\, g_2(t_1)\dots g_2(t_m)g_1(t_{m+1})\dots g_1(t_n)$$

Kausalitätseigenschaft der Potenzreihe

$$T_n(t_1,\dots,t_n) = T_m(t_1,\dots,t_m)T_{n-m}(t_{m+1},\dots,t_n)$$

falls für alle $t_i \in \{\, t_1 \dots t_m \,\}, t_j \in \{\, t_{m+1} \dots t_n \,\}$ *gilt:* $t_i < t_j$

Avancierte bzw. Retardierte Funktionen

$$A'_2(t_1, t_2) = \tilde{T}_1(t_1)T_1(t_2) = -T_1(t_1)T_1(t_2)$$

$$R'_2(t_1, t_2) = T_1(t_2)\tilde{T}_1(t_1) = -T_1(t_2)T_1(t_1)$$

$$A_2(t_1, t_2) = A'_2(t_1, t_2) + T_2(t_1, t_2)$$

$$R_2(t_1, t_2) = R'_2(t_1, t_2) + T_2(t_2, t_1)$$

$$\overset{\text{Kausalitätseigenschaft}}{\Longrightarrow} \begin{cases} A_2 = 0 & \text{für} \quad t_1 < t_2 \\ R_2 = 0 & \text{für} \quad t_1 > t_2 \end{cases}$$

Avancierte bzw. Retardierte Funktionen

$$A'_2(t_1, t_2) = \tilde{T}_1(t_1) T_1(t_2) = -T_1(t_1) T_1(t_2)$$

$$R'_2(t_1, t_2) = T_1(t_2) \tilde{T}_1(t_1) = -T_1(t_2) T_1(t_1)$$

$$A_2(t_1, t_2) = A'_2(t_1, t_2) + T_2(t_1, t_2)$$

$$R_2(t_1, t_2) = R'_2(t_1, t_2) + T_2(t_2, t_1)$$

$$\overset{\text{Kausalitätseigenschaft}}{\Longrightarrow} \begin{cases} A_2 = 0 & \text{für} \quad t_1 < t_2 \\ R_2 = 0 & \text{für} \quad t_1 > t_2 \end{cases}$$

Avancierte bzw. Retardierte Funktionen

$$A'_2(t_1, t_2) = \tilde{T}_1(t_1)T_1(t_2) = -T_1(t_1)T_1(t_2)$$

$$R'_2(t_1, t_2) = T_1(t_2)\tilde{T}_1(t_1) = -T_1(t_2)T_1(t_1)$$

$$A_2(t_1, t_2) = A'_2(t_1, t_2) + T_2(t_1, t_2)$$

$$R_2(t_1, t_2) = R'_2(t_1, t_2) + T_2(t_2, t_1)$$

$$\overset{\text{Kausalitätseigenschaft}}{\Rightarrow} \begin{cases} A_2 = 0 & \text{für} \quad t_1 < t_2 \\ R_2 = 0 & \text{für} \quad t_1 > t_2 \end{cases}$$

Induktionsanfang

$$D_2 = R_2 - A_2 = R_2' - A_2'$$

$$\begin{aligned} R_2(t_1,t_2) =& \Theta(t_1-t_2) D_2(t_1,t_2) \\ =& \Theta(t_1-t_2)(T_1(t_1)T_1(t_2) - T_1(t_2)T_1(t_1)) \\ & \text{mit } \Theta(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \le 0 \\ 1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2(t_1,t_2) =& R_2(t_1,t_2) - R_2'(t_1,t_2) \\ =& \Theta(t_1-t_2)T_1(t_1)T_1(t_2) + \Theta(t_2-t_1)T_1(t_2)T_1(t_1) = \\ =& \mathcal{T}[T_1(t_1)T_1(t_2)] \end{aligned}$$

Induktionsanfang

$$D_2 = R_2 - A_2 = R_2' - A_2'$$

$$\begin{aligned} R_2(t_1, t_2) =& \Theta(t_1 - t_2) D_2(t_1, t_2) \\ =& \Theta(t_1 - t_2)(T_1(t_1) T_1(t_2) - T_1(t_2) T_1(t_1)) \end{aligned}$$

$$\text{mit } \Theta(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T_2(t_1, t_2) =& R_2(t_1, t_2) - R_2'(t_1, t_2) \\ =& \Theta(t_1 - t_2) T_1(t_1) T_1(t_2) + \Theta(t_2 - t_1) T_1(t_2) T_1(t_1) = \\ =& \mathcal{T}[T_1(t_1) T_1(t_2)] \end{aligned}$$

Induktionsanfang

$$D_2 = R_2 - A_2 = R_2' - A_2'$$

$$\begin{aligned} R_2(t_1, t_2) =& \Theta(t_1 - t_2) D_2(t_1, t_2) \\ =& \Theta(t_1 - t_2)(T_1(t_1) T_1(t_2) - T_1(t_2) T_1(t_1)) \\ & \text{mit } \Theta(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2(t_1, t_2) =& R_2(t_1, t_2) - R_2'(t_1, t_2) \\ =& \Theta(t_1 - t_2) T_1(t_1) T_1(t_2) + \Theta(t_2 - t_1) T_1(t_2) T_1(t_1) = \\ =& \mathcal{T}[T_1(t_1) T_1(t_2)] \end{aligned}$$

Induktionsschritt

- Induktionsvoraussetzung: $T_{n-1}(t_1 \dots t_{n-1}) = \mathcal{T}[T_1(t_1) \dots T_1(t_{n-1})]$
- Induktionsschritt:

$$A'_n(t_1, \dots, t_n) = \sum_{P_2} \tilde{T}_{n_1}(X_1) T_{n-n_1}(X_2, t_n)$$

$$R'_n(t_1, \dots, t_2) = \sum_{P_2} T_{n-n_1}(X_2, t_n) \tilde{T}_{n_1}(X_1)$$

$$A_n(t_1, \dots, t_n) = \sum_{P_2^0} T'_{n_1}(X_1) T_{n-n_1}(X_2, t_n) = A'_n + T_n(t_1, \dots, t_n)$$

$$R_n(t_1, \dots, t_n) = \sum_{P_2^0} T_{n-n_1}(X_2, t_n) T'_{n_1}(X_1) = R'_n + T_n(t_1, \dots, t_n)$$

$$D_n = R_n - A_n = R'_n - A'_n$$

$$T_n(t_1, \dots, t_n) = T_m(t_1, \dots, t_m) T_{n-m}(t_{m+1}, \dots, t_n)$$

falls für alle $t_i \in \{ t_1 \dots t_m \}, t_j \in \{ t_{m+1} \dots t_n \}$ gilt: $t_i < t_j$

Induktionsschritt

- Induktionsvoraussetzung: $T_{n-1}(t_1 \dots t_{n-1}) = \mathcal{T}[T_1(t_1) \dots T_1(t_{n-1})]$
- Induktionsschritt:

$$A'_n(t_1, \dots, t_n) = \sum_{P_2} \tilde{T}_{n_1}(X_1) T_{n-n_1}(X_2, t_n)$$

$$R'_n(t_1, \dots, t_2) = \sum_{P_2} T_{n-n_1}(X_2, t_n) \tilde{T}_{n_1}(X_1)$$

$$A_n(t_1, \dots, t_n) = \sum_{P_2^0} T'_{n_1}(X_1) T_{n-n_1}(X_2, t_n) = A'_n + T_n(t_1, \dots, t_n)$$

$$R_n(t_1, \dots, t_n) = \sum_{P_2^0} T_{n-n_1}(X_2, t_n) T'_{n_1}(X_1) = R'_n + T_n(t_1, \dots, t_n)$$

$$D_n = R_n - A_n = R'_n - A'_n$$

$$T_n(t_1, \dots, t_n) = T_m(t_1, \dots, t_m) T_{n-m}(t_{m+1}, \dots, t_n)$$

falls für alle $t_i \in \{ t_1 \dots t_m \}, t_j \in \{ t_{m+1} \dots t_n \}$ gilt: $t_i < t_j$

Ausblick

- Keine allgemeine Entwicklungsgleichung in der QED $\Rightarrow$ Erste Methode nicht übertragbar
- Kausalitätseigenschaft der S-Matrix gilt auch in der QED $\Rightarrow$ Methode von Epstein und Glaser

Ausblick

- Keine allgemeine Entwicklungsgleichung in der QED $\Rightarrow$ Erste Methode nicht übertragbar
- Kausalitätseigenschaft der S-Matrix gilt auch in der QED $\Rightarrow$ Methode von Epstein und Glaser

Ende

Danke für Eure Aufmerksamkeit!!!