MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2019/20

Übungen zur Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 2

Aufgabe 1. Sei V ein Vektorraum mit Metrik d, die Abbildung f sei nur auf einer Teilmenge $I \subset V$ kontrahierend, d.h. für ein $0 < q < 1$ gilt $d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y)$ für alle $x, y \in I$.

Finden Sie Bedingungen an das Intervall I, so dass Sie mit Sicherheit einen Fixpunkt von f auf I finden können.

Aufgabe 2. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Beweisen Sie die Äquivalenz von Vollständigkeit und Intervallschachtelungsprinzip. Letzteres sagt folgendes aus: Für jede nichtleere, absteigende Folge von abgeschlossenen Quadern $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, also $A_{n+1} \subset A_n \ldots \subset A_1 \subset V$ deren Durchmesser eine Nullfolge ist, also $\lim_{n\to\infty} D(A_n) = 0$, gilt: Es gibt genau ein x mit $x \in A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Der Durchmesser D für eine Menge $B \subset V$ ist definiert durch

$$D(B) := \sup_{x,y\in B} \|x - y\| \ .$$

Aufgabe 3.

Gegeben Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $f(x, y) = \frac{1}{2}(x + y, y + 1)$, außerdem die durch die euklidische Norm, die Maximumsnorm und die Einsnorm induzierten Metriken d_2, d_∞ und d_1, d.h. $d_a(v, w) = \|v - w\|_a$ mit $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$ und $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$.

Überprüfen Sie für jede dieser Metriken, ob f eine Kontraktion ist. Hat f auf $\mathbb{R}^2$ einen Fixpunkt? Ist dieser eindeutig?

Aufgabe 4.

Zeigen Sie: Der Abschluss $\overline{M}$ und der Rand δM einer jeden Teilmenge M eines metrischen Raumes sind immer abgeschlossen.