MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2019/20

Übungen zur Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 1

Aufgabe 1. In der Vorlesung haben wir gelernt, dass der Konvergenzbegriff von der gewählten Metrik abhängt. Dies ist bereits für Folgen auf $\mathbb{R}$ der Fall, wie in dieser Aufgabe gezeigt werden soll.

Gegeben seien für $x \in \{a, b, c\}$ die Abbildungen $d_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ gegeben durch

(1) $d_a(x, y) = |x - y|$

(2) $d_b(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ falls } x = y \\ 1 \text{ sonst }. \end{cases}$

(3) $d_c(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ falls } |x - y| < 1 \\ 1 \text{ sonst }. \end{cases}$

(a) Welche dieser Abbildungen sind Metriken? Beweisen Sie Ihre Aussage.

(b) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge, $a \in \mathbb{R}$. Für $x \in \{a, b, c\}$ sei A_x die Aussage der Konvergenz der Folge bzgl. des Abstandsbegriffes d_x, d.h.

$$A_x : \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n \in \mathbb{N} \text{ so dass } d_x(a_k, a) < \varepsilon \;\; \forall k \geq n \; .$$

(ignorieren Sie hier, dass d_x nicht notwendiger Weise eine Metrik ist).

Zeigen oder widerlegen Sie jeweils $A_x \Rightarrow A_y$ für alle Paare $x, y \in \{a, b, c\}$.

Aufgabe 2. Es seien V, W endlichdimensionale Vektorräume mit Normen $\|\cdot\|_V$ bzw. $\|\cdot\|_W$. Es sei $f : V \to W$ und $x \in V$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender alternativer Definitionen von Stetigkeit:

(a) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ so dass $\|x - y\|_V < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_W < \varepsilon$

(b) $\lim_{n\to\infty} \|a_n - x\|_V = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|f(a_n) - f(x)\|_W = 0$

(c) U offen bzgl. $\|\cdot\|_W \Rightarrow f^{-1}(U)$ ist offen bzgl. $\|\cdot\|_V$.

Aufgabe 3.

Es seien V, W endlichdimensionale Vektorräume. Zeigen Sie die Äquivalenz des Stetigkeitsbegriffs für alle Normen auf V und W, d.h. dass für $f : V \to W$ und $x \in V$ sowie zwei beliebige Normen $\|\cdot\|_V$ und $\|\cdot\|'_V$ auf V und zwei beliebige Normen $\|\cdot\|_W$ und $\|\cdot\|'_W$ auf W folgendes Aussagen äquivalent sind

(a) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ so dass $\|x - y\|_V < \delta \to \|f(x) - f(y)\|_W < \varepsilon$

(b) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ so dass $\|x - y\|'_V < \delta \to \|f(x) - f(y)\|'_W < \varepsilon$