

Abschlussbericht zur Förderung durch Lehre@math.LMU

Leander Stecker

22. September 2017

Im Bereich der Riemannschen Geometrie nimmt der Levi-Civita-Zusammenhang ∇ , als eindeutiger torsionsfreier und metrischer Zusammenhang, eine sehr zentrale Rolle ein und codiert einen Großteil der geometrischen Information der zugrundeliegenden Riemannschen Mannigfaltigkeit. Ich habe mich daher mit der Frage nach der Existenz beziehungsweise den Implikationen eines parallelen Vektorfeldes X , also einer Lösung der Gleichung $\nabla X = 0$, beschäftigt.

Die Frage kann dabei in 3 Teile gegliedert werden. Die erste Frage, wie das Vektorfeld X zu sein hat, ist dabei am einfachsten zu beantworten. Es stellt sich heraus, dass X genau dann parallel ist, wenn die duale 1-Form harmonisch ist und X Killing ist, also durch Isometrien wirkt. Die zweite Frage stellt sich die nach der glatten Struktur der Mannigfaltigkeit M . Hierzu liefert der Artikel "Manifolds that Admit Parallel Vector Fields" von D. Welsh einen wesentlichen Beitrag. Es zeigt sich, dass kompakte Mannigfaltigkeiten mit parallelem Vektorfeld ein Faserbündel über einem Torus mit endlicher Strukturgruppe darstellen. Als dritte Frage stellt sich die nach der Riemannschen Struktur so einer Mannigfaltigkeit. Die De Rham Zerlegung zeigt, dass sich in der universellen Überlagerung die parallelen Vektorfelder als euklidischer Faktor abspalten. Gleichzeitig konnte ich aber unter einer zusätzlichen Bedingung, die aus der Konstruktion zuvor folgt, zeigen, dass die Wirkung der Fundamentalgruppe, soweit sie mit den parallelen Vektorfeldern interagiert, eine ganz spezifische Form hat.

Mit der Förderung durch Lehre@math.LMU war es mir möglich, an der Konferenz im Rahmen der gemeinsamen Jahrestagung der DMV und der ÖMG vom 11.-15. September 2017 an der Paris-Lodron Universität in Salzburg teilzunehmen. Hierbei war für mich und meine Arbeit im Speziellen die von I. Agricola und A. Cap organisierte Sektion zu "Differenzialgeometrie und Topologie" von Interesse. Üblicherweise gab es sowohl vormittags als auch nach der Mittagspause zunächst einen Plenarvortrag, über ein Thema eines Fachbereichs der Mathematik, danach 4-5 Vorträge im Rahmen der zuvor erwähnten fachspezifischen Sektion zur Geometrie über aktuelle Forschungsergebnisse. Außerdem gab es im Rahmen der Konferenz die Möglichkeit zu zahlreichen anregenden Gesprächen mit anderen Studierenden, Professoren und weiteren Fachleuten.