# Vortrag auf der Studierendenkonferenz der deutschen Mathematikervereinigung:

# Characteristic Spaces of del Pezzo Surfaces

Die Förderung durch Lehre@LMU hat es mir ermöglicht, meine Masterarbeit auf der Studierendenkonferenz der deutschen Mathematikervereinigung vorzustellen.

Zunächst zum Inhalt meiner Arbeit, die ich bei Herrn Professor Dr. Ulrich Derenthal auf dem Gebiet der algebraischen Geometrie geschrieben habe: Bekanntermaßen kann man den $n$-dimensionalen projektiven Raum durch homogene Koordinaten der Form $[x_0, \dots, x_n]$ parametrisieren. Dabei identifiziert man $[x_0, \dots, x_n]$ mit $[kx_0, \dots, kx_n]$, wenn $k$ ein Skalar ungleich Null ist. Außerdem ist der Fall $x_0 = \cdots = x_n = 0$ per Definition ausgeschlossen. Diese Parametrisierung des projektiven Raumes lässt sich auf eine große Klasse von algebraischen Varietäten (das sind Flächen und höherdimensionale Räume, ähnlich wie Mannigfaltigkeiten) verallgemeinern. Die allgemeine Konstruktion ist bekannt, aber es ist nicht leicht, die involvierten Objekte (insbesondere den Koordinatenraum) für eine gegebene Varietät konkret auszurechnen und explizit zu beschreiben. Ich habe mich damit beschäftigt, was aus der Bedingung „nicht $x_0 = \cdots = x_n = 0$" für den projektiven Raum im allgemeinen Fall wird. Etwas technischer ausgedrückt betrachten wir eine Varietät $X$, die bestimmte Bedingungen erfüllt. Dann lässt sich $X$ als Quotient (die Bildung eines Quotienten entspricht dem Identifizieren von Punkten unter Skalarmultiplikation im oben beschriebenen Beispiel) eines Koordinatenraumes $\hat{X}$ darstellen, wobei $\hat{X}$ der „charakteristische Raum" von $X$ genannt wird (siehe Titel). Es stellt sich heraus, dass $\hat{X}$ eine offene Untervarietät einer affinen Varietät $\bar{X}$ ist. Das Komplement von $\hat{X}$ in $\bar{X}$ ist die Menge der gemeinsamen Nullstellen von Funktionen $f_1, \dots, f_m$ (im obigen Beispiel ist etwa $m = n + 1$ und $f_i(x_0, \dots, x_n) = x_{i-1}$). Es ist bekannt, wie man die Funktionen $f_1, \dots, f_m$ aus einer explizit gegebenen affinen Überdeckung von $X$ ermittelt. Für eine komplizierte Varietät $X$ ist es aber mühsam, eine affine Überdeckung zu ermitteln. In meiner Masterarbeit untersuche ich deshalb alternative Wege, die Funktionen $f_1, \dots, f_m$ zu bestimmen. Eine erste Erkenntnis ist, dass wir *mindestens* die gemeinsamen Nullstellen von $f_1, \dots, f_m$ herausschneiden müssen, wenn die Funktionen $f_1, \dots, f_m$ zu einer *beliebigen* (also nicht notwendigerweise affinen) Überdeckung von $X$ gehören. Man kann dann $\bar{X} \backslash \hat{X}$ ausschöpfen, indem man mehrere nicht-affine Überdeckungen anstatt einer affinen Überdeckung verwendet. Aus dieser Beobachtung leite ich verschiedene Formeln zur Bestimmung der Funktionen $f_1, \dots, f_m$ her, die ohne eine affine Überdeckung auskommen. An Stelle einer affinen Überdeckung genügt es nun, ein Erzeugendensystem des Cox-Rings von $X$ zu kennen, oder alternativ eine Beschreibung von $X$ als iterative Aufblasung einer hinreichend einfachen Varietät. Als Anwendung dieser Formeln untersuche ich insbesondere charakteristische Räume von del Pezzo Flächen.

Auf der Studierendenkonferenz der deutschen Mathematikervereinigung (DMV) haben Absolventen der Mathematik einmal jährlich die Gelegenheit, ihre Abschlussarbeiten (zumeist Master- oder Zulassungsarbeiten für das Lehramt, in Einzelfällen auch Bachelorarbeiten) vorzustellen. Ich fand es einfach toll, zum Abschluss meines Masterstudiums einmal mehr zu sehen, wie vielfältig die Mathematik ist und was für faszinierende Gebiete sich die Teilnehmer in ihren Arbeiten erschlossen haben. Eine Teilnahme kann ich nur wärmstens empfehlen.

*Anton Freund*